МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТУ-УГМК

С.П Трофимов

Контрольная работа

Методическая разработка для заочной формы обучения

по дисциплине
«Методы оптимизации»

В.Пышма

2017

Оглавление

Теоретическая часть

1.Исследование функции на безусловный экстремум

Рассматривается задача

$$f(x) \to \text{extr},\ x \in E^n. \qquad (1)$$

Метод поиска безусловного экстремума основывается на следующих условиях оптимальности:

1) Необходимое условие оптимальности 1- порядка

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^* \in E^n$. Тогда если x^* локальное решение задачи (1), то

$$grad\, f(x^*)=0 \qquad (2)$$

2) **Необходимое условие оптимальности 2- порядка**

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x^* \in E^n$. Тогда

i) Если x^* - точка локального минимума в задаче (1), то матрица Гессе $H(x^*)$ неотрицательно определена, то есть, $\forall p \in E^n$ выполняется неравенство $(H(x^*)\ p,p) \geq 0$.

ii) Если x^* - точка локального максимума в задаче (1), то матрица $H(x^*)$ неположительно определена, то есть, $\forall p \in E^n$ выполняется $(H(x^*)\ p,p) \leq 0$.

3) **Достаточное условие оптимальности 2- порядка**

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x^* \in E^n$ и $grad\, f(x^*)=0$.

i) Если матрица $H(x^*)$ положительно определена, то есть, $(H(x^*)\ p,p) > 0$, $\forall p \in E^n$, $p \neq 0$, то x^* - точка строгого локального минимума функции $f(x)$ на E^n.

ii) Если матрица $H(x^*)$ отрицательно определена, то есть, $(H(x^*)\ p,p) < 0$ $\forall p \in E^n$, $p \neq 0$, то x^* - точка строгого локального максимума функции $f(x)$ на E^n.

iii) Если матрица $H(x^*)$-знакопеременная, то x^* не является точкой локального экстремума.

iv) Если матрица $H(x^*)$- полуопределеная, то об оптимальных свойствах x^* ничего сказать нельзя, нужны дополнительные исследования.

Если $grad\, f(x^*)=0$, то x^* называется стационарной точкой. Для выпуклой (вогнутой) на E^n функции стационарные точки являются точками ее глобального минимума (максимума). Строго выпуклые (вогнутые) функции имеют единственный глобальный минимум (максимум).

<u>Критерий выпуклости функции</u>. Дважды непрерывно дифференцируемая на выпуклом множестве X с непустой внутренностью функция является выпуклой (вогнутой) на этом множестве в том и только том случае, когда матрица Гессе $H(x^*)$ неотрицательно (неположительно) определена для всех $x \in X$.

При исследовании на знакоопределенность матрицы вторых производных функции рекомендуется применять критерий Сильвестра или анализ собственных значений матрицы.

Схема поиска безусловных экстремумов функции:

1. Составить и решить систему алгебраических уравнений (2).
2. В стационарных точках x^* (точках, являющихся решением системы (2)) исследовать на знакоопределенность матрицу вторых производных. Точки, в которых гессиан $H(x^*)$ *положительно определен*, являются точками глобального минимума; стационарные точки, в которых $H(x^*)$ *отрицательно определен*, являются точками глобального максимума. Если гессиан знакопеременный, то x^* не является экстремумом. Если гессиан полуопределенный, то для определения оптимальности нужны дополнительные исследования.
3. Исходя из вида исследуемой функции, проанализировать стационарные точки, в которых матрица вторых производных не является строго знакоопределенной.
4. Найденные точки локального экстремума исследуются на глобальный экстремум (если это возможно). В частность, если матрица Гессе неотрицательно (неположительно) определена на всем пространстве E^n, то все стационарные точки функции являются точками глобального минимума (максимума).

2. Численные методы безусловной минимизации

Численное решение задачи минимизации (1), как правило, связано с построением минимизирующей последовательности точек $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, обладающих свойством

$$f(x^k) < f(x^{k-1}),\ k=0,1,\ldots \qquad (3)$$

Общее правило построения минимизирующей последовательности имеет вид

$$x^{k+1}=x^k+t_kd^k,\ k=0,1,....,$$

где x^0 начальная точка поиска, d^k приемлемое направление перехода из точки x^k

в точку x^{k+1}, которое обеспечивает выполнение условий (3) и называется направлением спуска, t_k величина шага. Начальная точка поиска задается, исходя из физического содержания решаемой задачи и априорных данных о наличии и положении точек экстремума.

При решении вопроса о выборе численного метода рекомендуется оценить поведение линий уровня целевой функции в окрестностях предполагаемой точки экстремума. Число $m = L/l$, где L - максимальное, а l-минимальное собственные значения гессиана функции f в предполагаемой точке экстремума x^0 (характеризующее, вообще говоря, разброс собственных значений оператора $f(x)$) называют числом обусловленности гессиана функции f в точке x^0. Если $m >> 1$, то функцию называют плохо обусловленной или овражной. “Овражность”, то есть вытянутость линий уровня вдоль одного направления, приводит к тому, что градиентные методы сходятся медленно.

В зависимости от наивысшего порядка частных производных функции $f(x)$, используемых для формирования d^k и t_k, численные методы принято делить на три группы:

1. Методы нулевого порядка, использующие информацию только о значениях функции $f(x)$ (методы деформируемого многогранника, конфигураций). Эти методы могут применяться в тех случаях, когда функция задана неявно или не задана аналитически, но известен ряд значений функции или эти значения вычисляются непосредственно в ходе реализации алгоритма. Они также могут быть полезны в случаях, когда производные функции могут быть заданы аналитически, но их выражения очень громоздки.

2. Методы первого порядка, использующие информацию о значениях самой функции $f(x)$ и ее первых производных (методы наискорейшего градиентного спуска, дробления шага, Гаусса-Зейделя, Флетчера-Ривса).
3. Методы второго порядка, использующие, кроме того, и информацию о вторых производных функции $f(x)$ (метод Ньютона и его модификации)

Метод конфигураций (Хука-Дживса)

Состоит из двух этапов: 1) исследование с циклическим изменением переменных и 2) ускорение поиска по образцам.

Исследующий поиск начинается в точке x^0, называемой старым базисом. Направления поиска – координатные направления. По каждому направлению поочередно с шагом $+t_0$ ($-t_0$), проверяется выполнение условия (2), и в качестве нового базиса берется точка, с координатами, полученными в результате удачных шагов из начальной точки по каждому направлению.

Направление от старого базиса к новому задает направление ускорения поиска: в качестве следующей точки минимизирующей последовательности проверяется точка $y^1=x^0+\lambda(x^1-x^0)$. Здесь λ - ускоряющий множитель, задаваемый пользователем. Если полученная точка является удачной, то она берется в качестве следующей точки для исследования. В противном случае исследование ведется из точки x^1.

Метод деформируемого многогранника (Нелдера-Мида)

Строится последовательность множеств из $n+1$ точек, которые являются вершинами выпуклого многогранника. На каждом последующем $k+1$-м шаге из системы точек $x^i(k)$, $i=1, \dots ,n+1$, выводится точка $x^h(k)$, в которой функция $f(x)$ имеет наибольшее значение (худшая точка). Вместо точки $x^h(k)$ в систему вводится новая точка, выбираемая на отрезке прямой, проходящей через худшую точку и центр тяжести оставшихся n вершин многогранника:

$$x^{n+2}=\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n+1} x^{j}-x^{h}\right]$$ - центр тяжести;

$x^{n+3}= x^{n+2}+\alpha(x^{n+2}- x^{h})$ – новая точка (“растянутое” отражение наихудшей вершины).

Метод дробления шага

Строится последовательность точек $\{x^k\}$, k=0,1,..., таких, что $f(x^k)<f(x^{k-1})$, k=0,1,... .Точки последовательности $\{x^k\}$ вычисляются по правилу

$$x^{k+1}=x^k-t_k grad\, f(x^k),\ k=0,1,.... \quad (4)$$

Точка x^0 задается пользователем; grad $f(x^k)$ – градиент минимизируемой функции, вычисленный в точке x^k; величина шага t_0 задается пользователем и остается постоянной до тех пор, пока функция убывает в точках последовательности, что контролируется путем проверки выполнения условия

$f(x^{k+1})-f(x^k)$ <0 (или <-ε). Если условие убывания не выполняется, величина шага уменьшается, как правило, вдвое, то есть, $t_k=t_k/2$.

Метод наискорейшего градиентного спуска

Строится последовательность точек $\{x^k\}$, k=0,1,..., таких, что $f(x^k)<f(x^{k-1})$, k=0,1,... .Точки последовательности $\{x^k\}$ вычисляются по правилу

$x^{k+1}=x^k-t_k grad\ f(x^k)$, k=0,1,... . Точка x^0 задается пользователем; $grad\ f(x^k)$ – градиент минимизируемой функции, вычисленный в точке x^k; величина шага t_k определяется из условия минимума функции $\varphi(t_k)=a(x^k-t_k grad\ f(x^k))$. Задача минимизации одномерной функции $\varphi(t_k)$ может быть решена с использованием необходимого условия минимума $\frac{d\phi}{dt^k}=0$ с последующей проверкой достаточного условия минимума $\frac{d^2\phi}{dt_k^2}>0$ или с использованием численных методов.

Метод сопряженных направлений (Флетчера – Ривса)

Строится последовательность точек $\{x^k\}$, k=0,1,..., таких, что $f(x^k)<f(x^{k-1})$, k=0,1,... .Точки последовательности $\{x^k\}$ вычисляются по правилу:

$x^{k+1}=x^k-t_k d^k$, k=0,1,....;

$d^k=-\, grad\, f(x^k)+\beta_{k-1}d^{k-1}$;

(4)

$d^0=-\, grad\, f(x^0)$;

$\beta_{k-1}=\| grad\, f(x^k)\|^2 / \| grad\, f(x^{k-1})\|^2$

Точка x^0 задается пользователем; величина шага t_k определяется из условия минимума функции $\varphi(t)=a(x^k-t\ \ d^k))$. Задача минимизации одномерной функции $\varphi(t_k)$ может быть решена с использованием необходимого условия минимума $(d\varphi/dt)=0$ с последующей проверкой достаточного условия минимума $\frac{d^2\phi}{dt^2}>0$ или с использованием численных методов.

Метод Ньютона

Строится последовательность точек $\{x^k\}$, k=0,1,..., таких, что $f(x^k)<f(x^{k-1})$, k=0,1,... .Точки последовательности $\{x^k\}$ вычисляются по правилу $x^{k+1}=x^k+d^k$, k=0,1,..... Точка x^0 задается пользователем с учетом знакопостоянства и невырожденности матрицы Гессе в задаваемой начальной точке и близости выбранной точки к предполагаемой точке минимума. Направление спуска определяется для каждого значения k по формуле

$d^k=-H^{-1}(x^k)grad\,f(x^k)$, где H – матрица Гессе.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Записать необходимые условия экстремума. Аналитически или используя прикладные пакеты найти стационарные точки.
2. Проверить выполнение достаточных условий экстремума в найденных стационарных точках. Найти глобальный минимум функции. Оценить обусловленность задачи в точке минимума и "овражность" графика в окрестности точки минимума. Сделать предварительный вывод о работоспособности избранного численного метода.
3. Выбрать пакет, в котором будет строиться график. Рекомендации приведены в Приложении. Построить график функции, задавая пределы изменения координат с учетом аналитически найденных точек минимума – максимума.
4. Выбрать несколько начальных точек для реализации численного метода. Задать критерий завершения итерационного процесса. Найти минимум. Сравнить результаты с аналитически найденным значением глобального минимума. Исследовать сходимость алгоритма, фиксируя точность определения минимума, количество итераций метода и количество вычислений минимизируемой функции в зависимости от задаваемой точности поиска. Результатом выполнения данного пункта должны быть выводы об объёме вычислений в зависимости от задаваемой точности и начального приближения.

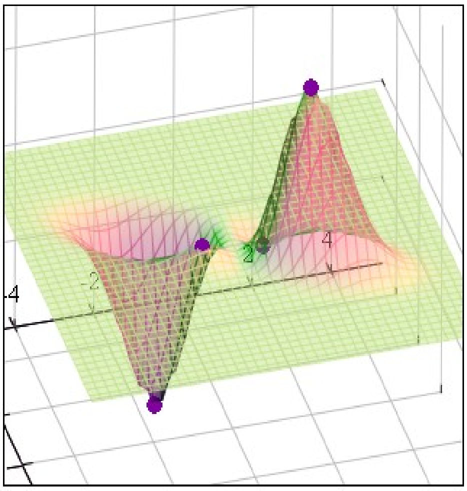
Пример выполнения лабораторной работы

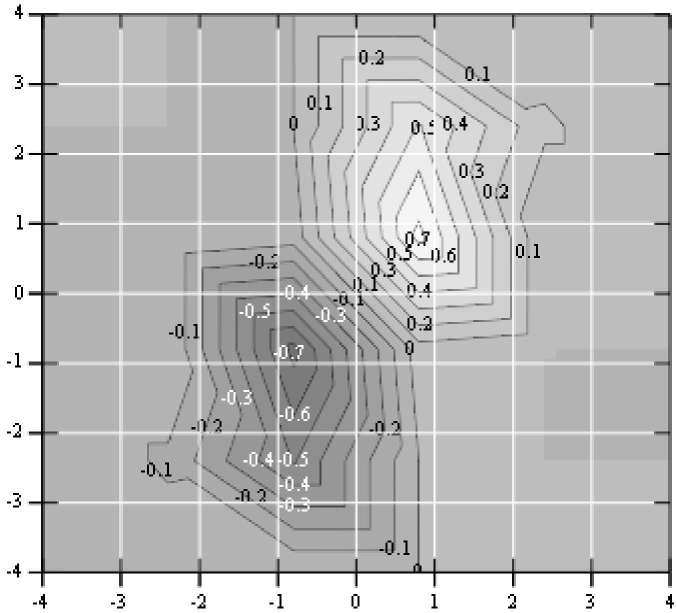
Функция: $f(x_1,x_2)=x_1x_2^2\exp(1-x_1^2-(x_1-x_2)^2)\to\min$, $x^0=(-2,-2)$.

Методы: градиентного спуска и Ньютона.

<u>Решение.</u>

Примечание: при построении графика используется среда MathCAD 12.1. 1. Построим график функции и линии уровня.





$(z^{\langle 0\rangle}, z^{\langle 1\rangle}, z^{\langle 2\rangle}), f$ f

2. Решим задачу минимизации аналитически.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = x_2^2 \exp\left(1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2\right)\left[1 + 2x_1(x_2 - 2x_1)\right]$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 \exp\left(1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2\right)\left[1 + x_1 x_2 - x_2^2\right]$$

Система для нахождения стационарных точек из условия равенства нулю градиента имеет вид

$$\left\{ x_2^2\left[1 + 2x_1(x_2 - 2x_1)\right] = 0 \right.$$ ¿¿¿¿

Если $x_1 x_2 = 0$

то из системы следует, что $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$

Первая стационарная точка – $A_0(0;0)$.

Если $x_1 x_2 \neq 0$:

$$\left\{ 1+2x_1\left(x_2-2x_1\right)=0 \right.$$ ¿¿¿¿

Подставим x_1 в первое уравнение:

$$1+2(x_2^2-1)-4\frac{(x_2^2-1)^2}{x_2^2}=0$$

Введем замену $t=x_2^2-1$:

$$1+2t-\frac{4t^2}{t+1}=0 \;\Rightarrow\; (t+1)+2t(t+1)-4t^2=0 \;\Rightarrow\; 2t^2-3t-1=0$$

$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4},\; x_2^2=t+1=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4} \;\Rightarrow\; x_{2(1,2)}=\frac{\sqrt{7\pm\sqrt{17}}}{2}$$

Обозначим

$$p_1=\frac{\sqrt{7+\sqrt{17}}}{2},\; p_2=\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{2}.$$

Получаем остальные стационарные точки:

$$A_1\left(\frac{p_1^2-1}{p_1}, p_1\right)$$
$$A_2\left(\frac{1-p_1^2}{p_1}, -p_1\right)=-A_1$$
$$A_3\left(\frac{p_2^2-1}{p_2}, p_2\right)$$
$$A_4\left(\frac{1-p_2^2}{p_2}, -p_2\right)=-A_3$$

Приближенные числовые координаты найденных точек:

A_0(0;0), A_1(1.068;1.668), A_2(-1.068;-1.668), A_3(-0.331;0.848), A_4(0.331;-0.848).

Построим и исследуем на знакоопределенность матрицу Гессе в точках A_0, …,A_4.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) = 2x_2^2 \exp\left(1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2\right) \left\{ (x_2 - 2x_1)\left[1 + 2x_1(x_2 - 2x_1)\right] + x_2 - 4x_1 \right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) = 2x_2 \exp\left(1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2\right) \left\{ \left[1 + 2x_1(x_2 - 2x_1)\right]\left[1 + x_1 x_2 - x_2^2\right] + x_1 x_2 \right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2) = 2x_1 \exp\left(1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2\right) \left\{ \left[1 + 2x_2(x_1 - x_2)\right]\left[1 + x_1 x_2 - x_2^2\right] + x_2(x_1 - 2x_2) \right\}$$

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$H(A_0(0;0))=0$ (требуется дополнительное исследование точки).

Анализ поведения функции в окрестности точки $A_0(0;0)$ показывает, что, придавая x_1 положительное и отрицательное значение при любом x_2, можно получить соответственно положительное и отрицательное значение функции. Таким образом, $A_0(0;0)$ не является ни точкой локального минимума, ни точкой локального максимума.

$H(A_1(1.068;1.668)) \approx \begin{pmatrix} -8.784 & 3.602 \\ 3.602 & -4.898 \end{pmatrix}$, отрицательно определена, в точке локальный максимум.

$H(A_2(-1.068;-1.668)) \approx \begin{pmatrix} 8.784 & -3.602 \\ -3.602 & 4.898 \end{pmatrix}$, положительно определена, в точке локальный минимум.

$H(A_3(-0.331;0.848))\approx\begin{pmatrix} 1.895 & -0.289 \\ -0.289 & 0.69 \end{pmatrix}$, положительно определена, в точке локальный минимум.

$H(A_4(0.331;-0.848)) \approx\begin{pmatrix} -1.895 & 0.289 \\ 0.289 & -0.69 \end{pmatrix}$, отрицательно определена, в точке локальный максимум.

Точками глобального экстремума являются $A_1(1.068;1.668)$ – глобальный максимум, $f\ (A_1)\ \approx 1.801$; $A_2(-1.068;-1.668)$– глобальный минимум, $f\ (A_2)\ \approx -1.801$.

3. Остальные задания реализованы на языке СИ, для чего написаны классы для работы с векторами и матрицами (CVector и CMatrix) и использующее их приложение. В методе наискорейшего спуска для одномерной минимизации используется метод золотого сечения. Для отыскания собственных чисел матрицы Гессе применяется метод Якоби, для построения обратной матрицы – метод Жордана-Гаусса.

В начале работы программа выводит информацию о стационарных точках:

Stationary dots:

x1 x2 f(x1,x2) Extreme

1.067890 1.667566 1.801131 LOC MAX

-1.067890 -1.667566 -1.801131 LOC MIN

-0.331077 0.848071 -0.144426 LOC MIN

0.331077 -0.848071 0.144426 LOC MAX

GLOBAL MIN: x(-1.067890, -1.667566)

f(x) = -1.801131

GLOBAL MAX: x(1.067890, 1.667566)

f(x) = 1.801131

Затем устанавливается начальная точка x^0(-2,-2), функция исследуется на выпуклость/вогнутость в этой точке, выводится число обусловленности матрицы Гессе:

x0(-2.000000, -2.000000) Hessian: Alternating sign

f(x0) = -0.398297

cond H(x0) = 4.751665

Таким образом, квадратичная форма, соответствующая матрице *H*(-2,-2), является знакопеременной. Функция не является “овражной” в окрестности точки, и допустимо применение метода градиентного спуска.

Далее запускается метод наискорейшего градиентного спуска, и выполняются 2 итерации.

Steepest descent method:

x2(-1.200031, -1.706888) Hessian: Convex

grad_f(x2) = (-0.963083, 0.275166)

f(x2) = -1.741440

В результате 2 итераций мы получили точку, достаточно близкую к точке глобального минимума.

Теперь из точки $(-2; -2)$ стартует метод Ньютона с поправкой гессиана. Результат двух итераций:

```
Newton method:

x2(-2.735431, -2.306328)     Hessian: Alternating sign

grad_f(x2) = (-0.110421, 0.031948)

f(x2) = -0.018516
```

Видно, что метод расходится. Начальная точка выбрана неудачно; увеличение числа итераций приводит к дальнейшему расхождению метода. Это объясняется тем, что метод Ньютона применим в окрестности точки минимума.

Анализируя линии уровня функции, выберем начальную точку ближе к оптимальной. Например, $(-1; -2)$:

```
x0(-1.000000, -2.000000)     Hessian: Convex

f(x0) = -1.471518

cond H(x0) = 3.786885


Newton method:

x2(-1.047041, -1.722604)     Hessian: Convex

grad_f(x2) = (0.379214, -0.339841)

f(x2) = -1.787758
```

Как в начальной, так и в конечной точке функция является выпуклой. За две итерации мы приблизились к точке $A_2(-1.068; -1.668)$.

Теперь возьмем начальную точку еще ближе к A_2, например $(-1; -1.5)$:

```
x0(-1.000000, -1.500000)     Hessian: Convex

f(x0) = -1.752302

cond H(x0) = 3.857905


Newton method:
```

```
x2(-1.067889, -1.667566)      Hessian: Convex

grad_f(x2) = (0.000000, 0.000000)

f(x2) = -1.801131
```

Метод Ньютона достиг точки глобального минимума, об этом говорит практически нулевой вектор-градиент.

Точное значение $f(A_2)$ отличается от найденного $f(x_2)=-1.801$ на $4.729\cdot 10^{-7}$(по модулю).

Выводы

В лабораторной работе проведено исследование заданной функции на глобальный экстремум с использованием аналитических преобразований, графика функции и разработанного приложения на языке C++.

С помощью метода градиентного спуска удалось улучшить целевую функцию без каких-либо дополнительных действий. Метод Ньютона при выборе в качестве начальной точки x^0(-2,-2) не сошелся. Проблема была решена заменой начальной точки на более подходящую для данного метода. Это позволило за две итерации прийти в точку глобального минимума. Полученные результаты хорошо согласуются с теорией.

Разработанные классы CVector и CMatrix могут применяться в будущих проектах.

3. Решение задачи минимизации со смешанными ограничениями

Общая задача нахождения экстремума функции при наличии ограничений - равенств и ограничений - неравенств записывается в следующем виде:

$$f(x) \to \text{extr}, \tag{5}$$

$$x \in X = \{x \in E^n: g_i(x) \le 0,\ i=1,2,...,r;\ g_i(x)=0,\ i=r+1,\ ...,\ m,\ m-r<n\},$$

где среди функций $f(x)$ и $g_i(x)$ могут быть нелинейные.

Активные ограничения – неравенства в точке x^* — это ограничения, которые выполняются в данной точке в виде равенства.

Пассивные ограничения – неравенства в точке x^* — это ограничения, которые выполняются в данной точке в виде строгого неравенства.

Если градиенты активных ограничений-неравенств и ограничений-равенств в точке x^* линейно независимы, то говорят, что в оптимальной точке выполнено условие регулярности.

Обобщенная функция Лагранжа для задачи со смешанными ограничениями задается как

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0 f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) \qquad (6)$$

В случае регулярности $\lambda_0^{¿}\neq 0$, и можно положить этот коэффициент равным 1.

Теорема Куна – Таккера (дифференциальная форма необходимого условия минимума)

Пусть точка x^* - точка локального минимума в задаче математического программирования (5), функции $f, g_{r+1},\ldots,g_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в точке x, функции $g_1,\ldots,g_r$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x. Тогда существует число $\lambda_0^{¿}$ и вектор $\lambda^{¿}$ такие, что выполняются следующие условия:

1) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

   $\mathrm{grad}_x L(x^*, \lambda_0^{¿}, \lambda^{¿})=0$

2) условие нетривиальности:

   $\lambda_0^{¿\,2}+\lambda^{¿\,2}>0$

то есть, хотя бы один из множителей Лагранжа отличен от нуля;

3) условие неотрицательности:

$\lambda_0^{¿}\geq 0$, $\lambda_i^{¿}\geq 0$, i=1, ..., r,

то есть, множители Лагранжа, соответствующие целевой функции и ограничениям – неравенствам, неотрицательны;

4) условия дополняющей нежесткости:

$\lambda_i^{¿} g_i(x^*)=0$, i=1, 2, ..., r

Если при этом выполнено условие регулярности, то справедливо следующее Утверждение: Если функции f, $g_{r+1},\ldots,$ g_m выпуклые, а функции $g_1,\ldots,$ g_r – линейные, то условия теоремы Куна – Таккера являются одновременно и достаточными условиями глобального минимума.

Достаточное условие минимума первого порядка:

Пусть имеется точка $(x^*,\lambda^{¿})$, удовлетворяющая условию стационарности обобщенной функции Лагранжа по x при $\lambda_0^{¿}\neq 0$, суммарное число активных ограничений-неравенств в точке x^* и ограничений-равенств совпадает с числом переменных n. Если $\lambda_j^{¿}>0$ для всех активных ограничений $g_j(x)$, то точка x^* - точка условного локального минимума в задаче (5).

Достаточное условие минимума второго порядка:

Пусть имеется точка $(x^*,\lambda^{¿})$, удовлетворяющая условию стационарности обобщенной функции Лагранжа по x при $\lambda_0^{¿}\neq 0$. Если в этой точке $d^2L(x^*,\lambda^{¿})>0$ для всех ненулевых dx таких, что для активных в точке x^* ограничений-неравенств $dg_j(x^*)=0$, $\lambda_j^{¿}>0$ и $dg_j(x^*)\leq 0$, $\lambda_j^{¿}=0$, то точка x^* является точкой локального минимума.

Общая схема решения задачи условной минимизации функции:

1) Составляется обобщенная функция Лагранжа вида (6).

2) Выписываются необходимые условия минимума, сформулированные в теореме Куна – Таккера. К этим условиям добавляются ограничения, задающие допустимое множество X. Полученная система алгебраических уравнений и неравенств используется для поиска условно-стационарных (подозрительных на экстремум) точек. Целесообразно проанализировать отдельно случаи $\lambda_0=0$ и $\lambda_0=1$ (или λ_0 – любое положительное число). Однако, если выполнено одно из условий регулярности, то вариант $\lambda_0=0$ рассматривать не надо.
3) В найденных точках проверяется выполнение достаточных условий минимума и проводится анализ на глобальный экстремум.

Седловые точки функции Лагранжа

Существование экстремума тесно связано с наличием у функции Лагранжа (6) так называемой седловой точки.

Рассматривается задача выпуклого программирования с ограничениями-неравенствами

$$f(x) \to \min, \qquad (7)$$

$$x \in X = \{x \in E^n: g_i(x) \le 0,\ i=1,2,\ldots,m;\ x \ge 0\},$$

Предполагается, что выполнено условие регулярности, то есть, можно рассматривать только вариант $\lambda_0=1$.

<u>Определение</u>

Точка $(x^*, \lambda^{¿})$, где $x^* \in X$, $\lambda^{¿} \in E^m$, $\lambda^{¿} \ge 0$, называется седловой точкой функции Лагранжа $L(x,\lambda)$, если

$$L(x^*,\lambda) \le L(x^*,\lambda^{¿}) \le L(x,\lambda^{¿}) \qquad (8)$$

<u>Утверждение 1 (критерий для седловых точек функции Лагранжа).</u>

Точка $(x^*,\lambda^{¿})$– является седловой для функции Лагранжа $L(x,\lambda)$ в том и только том случае, когда выполнены условия

$$L(x^*,\lambda^{¿})=\min \{L(x, \lambda^{¿})| \, x \in X\}, \qquad (9)$$

$$L(x^*,\lambda^{¿})=\max \{L\,(x^*,\lambda)| \, \lambda \geq 0\}, \qquad (10)$$

$$\lambda^{¿}_i \, g_i(x^*)=0,\ i=1, 2, ..., m. \qquad (11)$$

$$x^* \geq 0$$

$$\lambda^{¿} \geq 0$$

Условие (9) минимума функции Лагранжа по x эквивалентно выполнению в точке $(x^*,\lambda^{¿})$ неравенства

$$\frac{\partial L}{\partial x} \geq 0. \qquad (9')$$

Условие (6) максимума функции Лагранжа по λ эквивалентно выполнению в точке $(x^*,\lambda^{¿})$ неравенства

$$\frac{\partial L}{\partial x} \leq 0. \qquad (10')$$

Утверждение 2.

x^* - оптимальное решение задачи (3) в том и только том случае, когда существует такой вектор $\lambda^{¿} \geq 0$, что $(x^*,\lambda^{¿})$ – седловая точка функции Лагранжа $L\,(x,\lambda)$.

Метод седловой точки в задачах квадратичного программирования

Рассмотрим задачу квадратичного программирования, то есть,

$$f(x)=(Cx,x) +(d,x) \to \min \qquad (12)$$

$$g(x)=Ax \le b,$$

где C – матрица размера $n*n$, d,x – векторы-столбцы $n*1$, A – матрица размера $m*n$, b – вектор-столбец $m*1$.

Для задачи квадратичного программирования критерий существования седловой точки приобретает вид задачи решения СЛАУ. Действительно:

Функция Лагранжа в этом случае запишется в виде

$$L = \sum_{k=1}^{n} d_k x_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{kj} x_k x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right), \tag{13}$$

где c_{kj} – элементы матрицы C, d_k – элементы вектора d, b_i – элементы вектора свободных членов b, a_{ij} – элементы матрицы A, λ_i – коэффициенты Лагранжа.

Необходимые и достаточные условия оптимальности решения x^* принимают вид

$$v_j ¿\ d_j + 2^{¿n¿} c_{kj} x_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij},\ v_j \ge 0,\ (j=1,\ldots,n) \tag{14}$$

$$-y_i ¿\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i,\ -y_i \le 0,\ (\mathrm{i}=1,\ldots,m) \tag{15}$$

$$x_j v_j = 0,\ x_j \ge 0,\ (j=1,\ldots,n) \tag{16}$$

$$\lambda_i(-y_i) = 0,\ \lambda_i \ge 0 \tag{17}$$

Равенства (14). (15) образуют систему $n+m$ линейных уравнений с $2(n+m)$ неизвестными $x_{1,\ldots,}x_n, v_1,\ldots,v_n,\ \lambda_1,\ldots,\ \lambda_m, y_{1,\ldots,}y_m$. Решения этой системы, при которых выполняются равенства (16), (17), дают координаты седловой точки (x^*,λ^*).

Чувствительность решения ЗНП

Пусть $x^*=x^*(b)$ решение задачи нелинейного программирования

$$f(x) \to \min, \qquad (13)$$

$$x \in X = \{x \in E^n : g_i(x) \le b_i,\ i=1,2,\dots,m;\ x \ge 0\},$$

при некотором векторе b свободных членов в ограничениях – неравенствах, а $v(b)$, соответственно, значение целевой функции при этом решении ЗНП, то есть, $v(b)=f(x^*)$. Тогда справедлива следующая оценка изменения целевой функции: $\Delta v=f(b+\Delta b)-f(b)$ при изменении вектора b на некоторый малый вектор-приращение Δb:

$$\Delta f \approx (\Delta b, \lambda^*), \qquad (14)$$

где λ^* - вектор множителей Лагранжа, соответствующий решению $x^*(b)$.

Метод проекции градиента для задачи условной оптимизации

Задача $v=\inf f(x),\ x \in U \subseteq E^n$

Метод $x_{k+1} = P_U(x_k - \alpha_k\, df(x_k))$

Метод условного градиента для задачи условной оптимизации

Задача $v=\inf f(x),\ x \in U \subseteq E^n$

Метод $x_{k+1} = x_k + \alpha_k (x_k' - x_k)$,

где x_k' - решение вспомогательной задачи

$\inf\,(df(x_k), x_k' - x),\ x \in U.$

$0< \alpha_k <=1,\ \Sigma\, \alpha_k = +\infty,\ \lim \alpha_k = 0$

Метод возможных направлений для задачи условной оптимизации

Задача $v=\inf f(x),\ g_i(x) \le 0,\ i = 1,\dots,m$

Метод $x_{k+1} = x_k + \alpha_k\, e$,

где e - решение вспомогательной задачи

$\min \sigma$,

$(df(x_k), e) \le \sigma$,

$(dg_i(x_k), e) \le \sigma$, $i \in I(x_k)$

$|e| \le 1$

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Построить допустимую область задачи и линии уровня.
2. Записать функцию Лагранжа и необходимые условия экстремума, из которых аналитически или используя прикладные пакеты найти условно-стационарные точки.
3. Для каждой точки указать активные и пассивные ограничения. Проверить выполнение достаточных условий экстремума в найденных стационарных точках. Найти глобальный минимум функции. Используя критерий (утверждение 1), проверить, что найденная точка является седловой точкой функции Лагранжа.
4. Решить задачу квадратичного программирования методом седловой точки. Для этого записать систему (14)-(15), найти ее решения, удовлетворяющие условиям (16)-(17).
5. Проверить справедливость оценки (18), решив задачу при положительных и отрицательных малых значениях приращения Δb.
6. Решить задачу численным методом [8]. Метод условной минимизации выбрать самостоятельно. Сравнить результат с теоретическим решением.

Пример выполнения лабораторной работы

1. Минимизировать нелинейную функцию $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ при условиях $x_1 + x_2 + x_3 \le 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$, применяя метод функции Лагранжа. Проверить справедливость оценки изменения целевой функции (14).

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \rightarrow \min$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \le 0$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_0 x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 (x_1 + x_2 + x_3) + \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$$

Допустимая область – часть сферы $\|x\| = 1$, лежащая в подпространстве $\langle x, a \rangle \le 0$, $a = (1; 1; 1)$.

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$.

Если при этом $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_2 \ne 0$.

Из (1)…(3) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, что противоречит (8).

Если $\lambda_1 > 0$, то $\lambda_2 \ne 0$ (иначе получаем противоречия в (1)…(3)).

Из (1)…(3) $x_1 = x_2 = x_3 = -\dfrac{\lambda_1}{2\lambda_2}$. Подставим в (6):

$-\frac{3\lambda_1^2}{2\lambda_2}=0$. Отсюда $\lambda_1=0$. Но $\lambda_1>0$, пришли к противоречию.

Рассмотрим теперь случай $\lambda_0=1$.

(1′)

(2′)

(3′)

(4′)

(5′)

(6′)

(7′)

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то получаем точку $x^{¿}_{(1)} = (-1;\ 0;\ 0)$ (из (1′)…(3′),(7′)). Остальные «симметричные» точки здесь и далее приводить не будем.

Если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $x_1 x_2 x_3 \neq 0$, то:

(1′),(2′) $\Rightarrow \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1}{x_2}$

(2′),(3′) $\Rightarrow \dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{x_2}{x_3}$

(7′) $\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = \dfrac{1}{3}$

Из (6′) получаем точки $x^{¿}_{(2)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1;\ -1;\ -1)$ и $x^{¿}_{(3)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1;\ -1;\ -1)$. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\dfrac{x_2 x_3}{2 x_1}$. Для $x^{¿}_{(2)}$ значение $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, для $x^{¿}_{(3)}$ значение $\lambda_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \neq 0$:

(1″)

(2″)

(3″)

(4″)

(5″)

Если $x_1=0$, то (2″),(3″) $\Rightarrow x_2=x_3=-\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$; (4″) $\Rightarrow x_2=-x_3$.

Следовательно, $x_2=x_3=0$ и $\lambda_1=0$. Но $\lambda_1>0$, пришли к противоречию.

Значит, $x_1 x_2 x_3 \neq 0$.

(1″)+(2″)+(3″):

$x_2 x_3+x_1 x_3+x_1 x_2+3\lambda_1+2\lambda_2(x_1+x_2+x_3)=0$

Последнее слагаемое равно нулю согласно (4″).

Поэтому, $x_2 x_3+x_1 x_3+x_1 x_2=-3\lambda_1$.

С другой стороны, $0=(x_1+x_2+x_3)^2=\sum_{i=1}^{3} x_i^2+2(x_2 x_3+x_1 x_3+x_1 x_2)$

$\sum_{i=1}^{3} x_i^2=1$ (по (5″))

Следовательно, $x_2 x_3+x_1 x_3+x_1 x_2=-3\lambda_1=-\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{6}$.

Если $\lambda_2=0$, то (1″)…(3″) $\Rightarrow x_2 x_3=x_1 x_3=x_1 x_2=-\lambda_1=-\frac{1}{6}$.

Разделим на x_3: $x_2 = x_1 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$. Но если $x_1 = x_2$, то их произведение не может быть равно $-\frac{1}{6}$. Значит, $\lambda_2 \neq 0$.

Если $x_1 = x_2$, получаем систему:

$$\{ x_1 x_3 + 2\lambda_2 x_1 + \frac{1}{6} = 0 \text{¿} \{ x_1^2 + 2\lambda_2 x_3 + \frac{1}{6} = 0 \text{¿} \{ 2x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -2x_1,\ x_3^2 = 4x_1^2 \text{¿¿¿¿}$$

$$\lambda_2 = -\frac{x_1 x_3 + \frac{1}{6}}{2x_1} = -\frac{-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \pm\frac{\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Получаем точку $x^{¿}_{(4)} = \left(\mp\sqrt{\frac{2}{3}};\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}};\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (в силу симметрии переменных x_1, x_2, x_3 координаты можно переставить), $\lambda_1 = \frac{1}{6}$, $\lambda_2 = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Предположив $x_1 \neq x_2$, получим те же результаты.

Найдены следующие точки:

$x^{¿}_{(1)} = (-1;\ 0;\ 0)$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;

$x^{¿}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;\ -1;\ -1)$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$;

$x^{¿}_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1;\ -1;\ -1)$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$;

$x^{¿}_{(4)} = \left(\mp\sqrt{\frac{2}{3}};\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}};\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \frac{1}{6}$, $\lambda_2 = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Запишем второй дифференциал обобщенной функции Лагранжа.

$$d^2 L=\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} dx_1^2+\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} dx_2^2+\frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} dx_3^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3+2\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} dx_1^2=\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} dx_2^2=\frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} dx_3^2=2\lambda_2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=\lambda_0 x_3, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3}=\lambda_0 x_2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3}=\lambda_0 x_1$$

$$d^2 L=2\lambda_2 (dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+2\lambda_0 (x_1 dx_2 dx_3+x_2 dx_1 dx_3+x_3 dx_1 dx_2)$$

$g_1(x_1, x_2, x_3)$ является активным ограничением только для точки $x_{(4)}^{¿}$.

Применим достаточное условие минимума второго порядка к этой точке:

$$dg_1=dx_1+dx_2+dx_3$$
$$dg_1=0,\ \lambda_1>0$$
$$dx_3=-(dx_1+dx_2)$$

Подставив dx_3 и $\lambda_0=1$ во второй дифференциал функции Лагранжа, получим:

$$d^2 L=2(2\lambda_2-x_2) dx_1^2+2(2\lambda_2-x_1) dx_2^2+2(2\lambda_2-x_1-x_2+x_3) dx_1 dx_2$$

Запишем матрицу квадратичной формы относительно приращений:

$$A_L=\begin{pmatrix} 2(2\lambda_2-x_2) & 2\lambda_2-x_1-x_2+x_3 \\ 2\lambda_2-x_1-x_2+x_3 & 2(2\lambda_2-x_1) \end{pmatrix}$$

Для «верхнего» знака $x_{(4)}^{¿}$ матрица $A_L=\begin{pmatrix} 0 & 1.224745 \\ 1.224745 & 2.44949 \end{pmatrix}$. Для «нижнего» знака элементы матрицы меняют знак. Согласно критерию Сильвестра, в этой точке нет экстремума.

Сравним значения функции в остальных точках:

$f\left(x^{¿}_{(1)}\right)=0$

$f\left(x^{¿}_{(2)}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$f\left(x^{¿}_{(3)}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Точкой глобального минимума является $x^{¿}_{(3)}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1;\,-1;\,-1)$, значение функции в этой точке $f\left(x^{¿}_{(3)}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}\approx\text{-}0.192450$. $\lambda^{¿}=\left(1;\;0;\;\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

Проверим справедливость оценки $\Delta f\approx\langle\Delta b,\lambda^{¿}\rangle$ для точки $x^{¿}_{(3)}$, $b=(0;\,1)$.

Возьмем вектор $\Delta b=(\delta_1,\delta_2)$, ему соответствуют множители Лагранжа $\lambda=\left(0;\;\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

Следовательно, $\Delta f\approx\frac{\delta_2}{2\sqrt{3}}$.

Перепишем условие задачи, введя приращение Δb:

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3\rightarrow\min$

$g_1(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3\le\delta_1$
$g_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1+\delta_2$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_0 x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 (x_1 + x_2 + x_3 - \delta_1) + \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 - \delta_2)$$

Из первых трех уравнений получаем $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$.

Подставим в последнее уравнение: $3x_1^2 = 1 + \delta_2$, $\delta_2 \geq -1$.

$$x_i = -\sqrt{\frac{1+\delta_2}{3}}, \quad i = \overline{1,3}.$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = -\sqrt{\left(\frac{1+\delta_2}{3}\right)^3}.$$

Возьмем, например, $\Delta b = (2;\ 0.1)$.

$$|\Delta f| = |-\sqrt{\left(\frac{1+0.1}{3}\right)^3} - f(x_{(3)}^{¿})| \approx 0{,}030.$$

$$\Delta f \approx \langle \Delta b, \lambda^{¿} \rangle = \frac{0.1}{2\sqrt{3}} = 0.029$$

Проверим для $\Delta b = (2;\ -0.1)$:

$$|\Delta f| = |-\sqrt{\left(\frac{1-0.1}{3}\right)^3} - f(x_{(3)}^{¿})| \approx 0{,}028$$

С другой стороны, $|\Delta f| \approx |\langle \Delta b, \lambda^{¿} \rangle| = |\frac{-0.1}{2\sqrt{3}}| = 0.029$.

2. Решить задачу максимизации квадратичной функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ при условиях $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$ и $-x_i \leq 0, i = \overline{1,3}$.

Решение.

Перепишем условие следующим образом:

$$f1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 15 \le 0$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + \lambda_1 (x_1 + x_2 + x_3 - 15)$$

Необходимые и достаточные условия минимума:

$$v_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} \ge 0 \quad x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad x_i \ge 0$$

$$-y_i = \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \le 0 \qquad \lambda_i(-y_i) = 0 \quad \lambda_i \ge 0$$

Получаем систему уравнений и неравенств:

$$v_1 = -2x_1 + \lambda_1 \ge 0;\quad v_2 = -2x_2 + \lambda_1 \ge 0;\quad v_3 = -2x_3 + \lambda_1 \ge 0;\quad -y_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 15 \le 0;\quad \lambda_1(-y_1) = 0$$

Для решения промежуточной задачи ЛП воспользуемся средствами MS Excel.

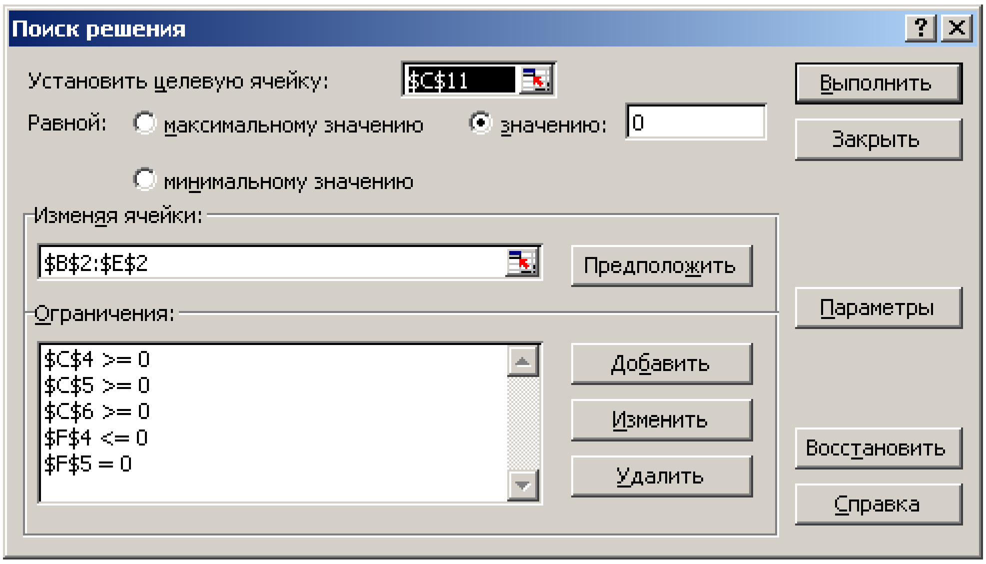
Введем формулы, соответствующие системе:

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	x3	λ1	
2		3	0	0	20	
3						
4		v1=	=-2*B2+E2		-y1=	=B2+C2+D2-15
5		v2=	=-2*C2+E2		λ1*(-y1)=	=E2*F4
6		v3=	=-2*D2+E2			
7		x1*v1=	=B2*C4			
8		x2*v2=	=C2*C5			
9		x3*v3=	=D2*C6			
10						
11		Ф=	=B2*C4+C2*C5+D2*C6			

Зададим начальное приближение:

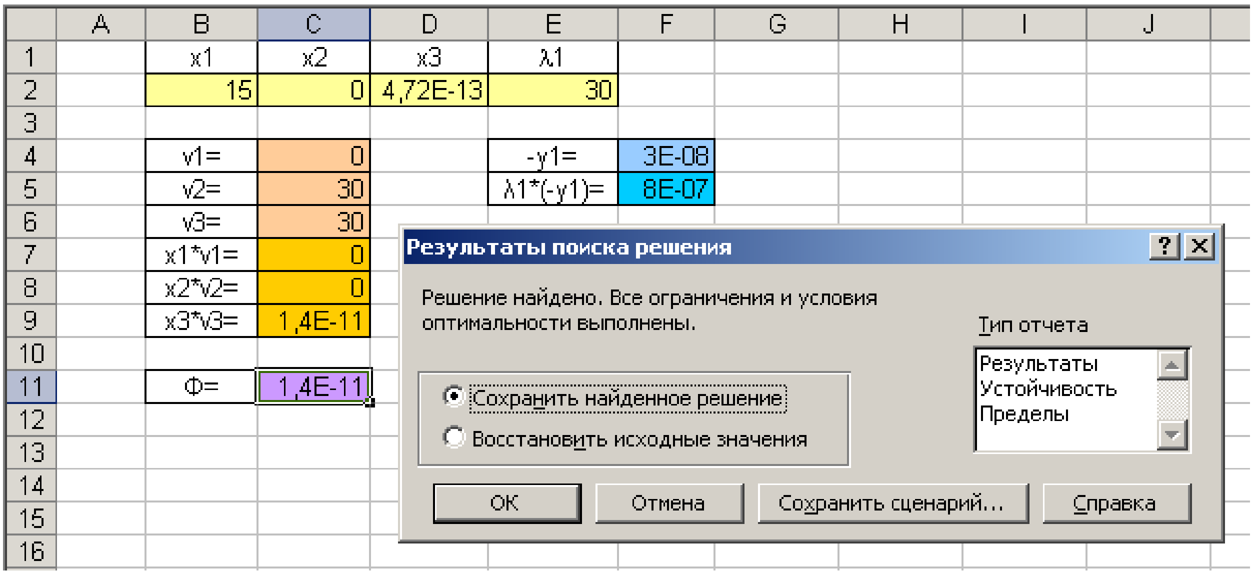
	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2	x3	λ1	
2		3	0	0	20	
3						
4		v1=	14		-y1=	-12
5		v2=	20		λ1*(-y1)=	-240
6		v3=	20			
7		x1*v1=	42			
8		x2*v2=	0			
9		x3*v3=	0			
10						
11		Ф=	42			

Заполним поля диалога «Поиск решения»:



В окне «Параметры» установим флажок «Неотрицательные значения».

Результат поиска решения:



Найдена седловая точка функции Лагранжа: $(x^*, \lambda^*) = (15;0;0;30)$. Оптимальное решение задачи: x^* (15;0;0), $f(x^*) = 15^2 = 225$.

4. Основные понятия линейного программирования

Модель задачи линейного программирования

Линейное программирование – направление математики, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием оптимальности.

Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП) включает в себя:

1) **целевую функцию** $f(\bar{x})$, оптимальное значение которой (максимум или минимум) требуется отыскать:

$$f(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max(\min) \qquad (1)$$

2) **ограничения** в виде системы линейных уравнений или неравенств (функциональные ограничения задачи):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \,(\le, =, \ge)\, b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \,(\le, =, \ge)\, b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \,(\le, =, \ge)\, b_m \end{cases} \qquad (2)$$

3) **требование неотрицательности** переменных (тривиальные ограничения задачи):

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \qquad (3)$$

В (1), (2), (3) a_{ij}, b_i, c_j ($i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$) – заданные постоянные величины.

Задача состоит в нахождении оптимального значения функции (1) при соблюдении ограничений (2) и (3).

Вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, удовлетворяющий ограничениям (2) и (3), называется **допустимым решением (планом)** ЗЛП.

План $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, имеющий не более ***m*** компонентов, отличных от нуля, называется **допустимым базисным планом** ЗЛП.

План $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$, при котором целевая функция $f(\bar{x})$ достигает максимального (минимального) значения, называется **оптимальным**.

Итого, математическая модель ЗЛП в векторно-матричной форме принимает вид:

$$\begin{array}{l} f(\bar{x}) = \bar{c}^T \bar{x} \to \max(\min) \\ A\bar{x}\,(\le, =, \ge)\,\bar{b} \\ \bar{x} \ge 0 \end{array},$$

где $\bar{x} = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)^T$ – оптимизируемый вектор параметров;

$\bar{c} = (c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n)^T$ – целевой вектор;

$\bar{b}=(b_1,\ b_2,\dots,\ b_m)^T$ – вектор ограничений;

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – технологическая матрица.

Свойства задачи линейного программирования

Рассмотрим некоторые теоремы (без доказательства), отражающие фундаментальные свойства ЗЛП и лежащие в основе методов их решения.

Теорема. Множество всех планов ЗЛП выпукло (если оно не пусто).

Таким образом, множество всех решений ЗЛП является **выпуклым многогранником** (**многогранником решений**).

Теорема. Целевая функция ЗЛП достигает своего максимального (минимального) значения в угловой точке многогранника решений. Если целевая функция принимает минимальное (максимальное) значение более чем в одной угловой точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

Итак, если целевая функция ЗЛП ограничена на многограннике решений, то существует такая угловая точка многогранника решений, в которой линейная функция ЗЛП достигает своего оптимума.

Теорема. Каждый допустимый базисный план является угловой точкой множества допустимых планов.

Теорема. Если $\bar{x}$ – угловая точка множества допустимых планов, то она является допустимым базисным планом задачи.

Двойственность в линейном программировании

С каждой задачей линейного программирования можно связать **двойственную задачу**.

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме (**прямую задачу**):

$$
\begin{aligned}
&f(\bar{x})=\bar{c}^T\,\bar{x}\to\max\\
&A\bar{x}\le\bar{b}\\
&\bar{x}\ge 0
\end{aligned}
$$

Задача

$$
\begin{aligned}
&\phi(\bar{y})=\bar{b}^T\,\bar{y}\to\min\\
&A^T\,\bar{y}\ge\bar{c}\\
&\bar{y}\ge 0
\end{aligned}
$$

называется **двойственной** к прямой задаче.

Сравнивая прямую задачу и двойственную, можно заметить пять «зеркальных» соотношений между ними:

1) число переменных прямой задачи равно числу функциональных ограничений двойственной задачи и наоборот;

2) технологические матрицы транспонированы по отношению друг к другу;

3) целевой вектор $\bar{c}$ прямой задачи равен вектору ограничений двойственной задачи и наоборот;

4) направления оптимизации противоположны;

5) знаки неравенств в функциональных ограничениях противоположны.

Если система функциональных ограничений прямой задачи состоит из неравенств и на все переменные x_j наложено условие неотрицательности, то прямая и двойственная задачи образуют **симметричную пару**

двойственных задач. В противном случае, прямая и двойственная задачи образуют **несимметричную пару двойственных задач**.

В несимметричном случае двойственная задача составляется по тем же правилам, что и в случае симметричной пары, но если функциональное ограничение прямой задачи является равенством, то соответствующая неизвестная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения и наоборот. Более того, если в прямой задаче переменная $x_j \geq 0$, то соответствующее ***j***-ое ограничение двойственной задачи – неравенство вида «¿ », если двойственная задача решается на минимум, и «¿ », если на максимум.

Смысл теории двойственности раскрывается с помощью двух теорем, из которых первая является основной, а вторая является следствием из первой. Нас в дальнейшем будет интересовать только первая теорема.

Теорема (**Первая теорема двойственности**).

I. Если одна из задач двойственной пары имеет решение, то и другая имеет решение, причём экстремальные значения целевых функций совпадают: f ¿ ¿.

II. Если одна из задач не имеет решения из-за неограниченности целевой функции, то другая также не имеет решения из-за противоречивости условий и наоборот.

Замечание. Для первой теоремы двойственности справедливо обращение: если f ¿ ¿, то планы $\bar{x}*$¿¿ и $\bar{y}*$¿¿ – оптимальные.

5. Задача транспортного типа

Построение модели транспортной задачи

Под транспортной задачей (ТЗ) обычно понимают задачу выбора плана перевозок некоторого товара от m источников (пунктов производства, поставщиков) к n стокам (станциям назначения, пунктам сбыта), обеспечивающего минимальные транспортные затраты. При этом предполагают, что а) мощность i-го источника равна $S_i>0$, $i=1, ..., m$; б) мощность j-го стока равна $D_j>0$, $j=1,...,n$; в) стоимость перевозки единицы товара от i-го источника к j-му стоку (тариф) равна c_{ij} (в условных денежных единицах).

Для математического описания транспортной задачи вводятся переменные x_{ij}, обозначающие объемы поставок товара из i-го источника к j-му стоку (в условных единицах объема товара).

Таким образом, получаем модель ТЗ в виде задачи линейного программирования

$\Sigma\Sigma c_{kj}x_{kj} \rightarrow \min$; (1)

$\Sigma x_{ij}= S_i$, $(i=1,...,m)$;

$\Sigma x_{ij}= D_j$, $(\mathbf{j=1,..., n})$; (2)

$x_{ij}\geq 0$, $i=1,...,m$, $\mathbf{j=1,..., n}$

Задача (1) с ограничениями (2) может быть решена стандартным симплекс-методом. Однако, специфика ограничений (каждое неизвестное входит только в два уравнения системы (2) с коэффициентами, равными 1) позволяет разработать специальные методы решения ТЗ и задач, которые сводятся к задачам транспортного типа (задача о назначениях, задача выбора кратчайшего пути, задача о замене оборудования и т.п.).

Формы представления ТЗ.

Задача (1), (2) может быть представлена в виде так называемой транспортной таблицы (матричная форма) (Рис.1) или в виде сети с ориентированными ребрами (Рис.2). Узлы сети соответствуют источникам и стокам ТЗ, ребро, соединяющее узлы i и j, – доставке товара из i-го источника к j-му стоку. Для каждого узла указывается его мощность, для каждого ребра – стоимость доставки груза (тариф).

Системы уравнений (2) можно представить в эквивалентном виде

$\Sigma x_{ij} = S_i$, $(i=1,...,m)$;

$-\Sigma x_{ij} = -D_j$, (**j=1,..., n**); (2’)

Тогда для представления задачи (1), (2’) удобнее использовать следующую форму транспортной таблицы (Рис. 3). Свободные места в таблице соответствуют нулевым коэффициентам при соответствующих переменных. Источникам соответствуют коэффициенты 1, а стокам - коэффициенты -1. В сетевой форме этой записи задачи будут соответствовать мощности стоков, равные ($-D_j$).

сток источник	**1**	**…**	**j**	**…**	**n**	**поставки**
1	x_{11} c_{11}	**…**	x_{1j} c_{1j}	**…**	x_{1n} c_{1n}	S_1
…	…	…	…	…	…	…
i	x_{i1} c_{i1}	…	x_{ij} c_{ij}	…	x_{in} c_{in}	S_i
…	…	…	…	…	…	…
m	x_{m1} c_{m1}	… …	x_{mj} c_{mj}	… …	x_{mn} c_{mn}	S_m
спрос	D_1	…	D_j	…	D_n	

Рис.1

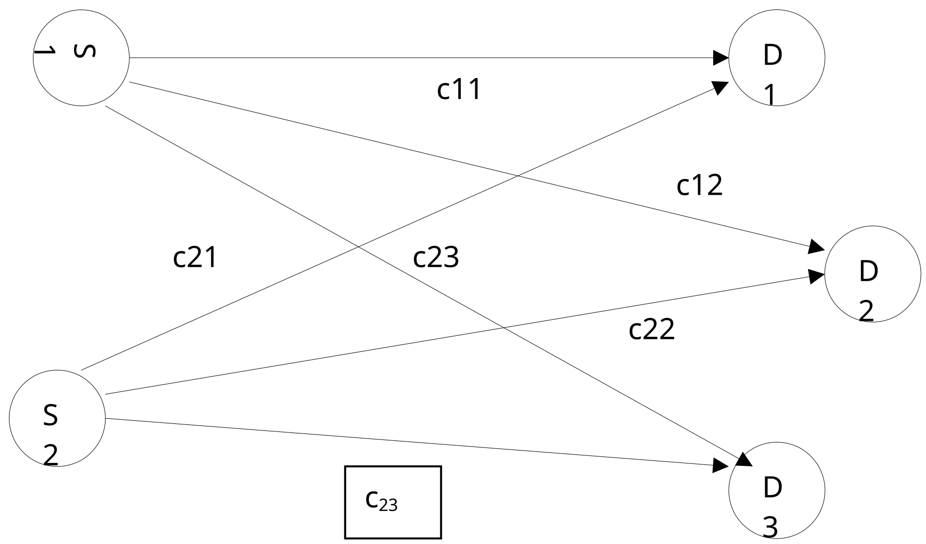


Рис.2.

		Объем поставок				
		$x_{11}\ x_{12} \ldots x_{1n}$	$x_{21}\ x_{22} \ldots x_{2n}$	…	$x_{m1}\ x_{m2} \ldots x_{mn}$	
Поставки	1	1 1 … 1				S_1
	2		1 1 … 1			S_2
	…			…		,,,
	m				1 1 … 1	S_m
спрос	1	-1	-1		-1	$-D_1$
	2	-1	-1		-1	$-D_2$
	...	…	…	…	…	...
	n	-1	-1		-1	$-D_n$
		$c_{11}\ c_{12} \ldots c_{1n}$	$c_{21}\ c_{22} \ldots c_{2n}$	…	$c_{m1}\ c_{m2} \ldots c_{mn}$	

Рис. 3

При классической постановке ТЗ предполагается выполнение условия

$$\Sigma S_i - \Sigma D_j = 0 \qquad (3)$$

то есть, суммарная мощность всех источников равна суммарной мощности всех стоков (закрытая форма ТЗ). Однако, это условие не является принципиальным, так как при его нарушении можно ввести фиктивный источник, если $\Sigma S_i - \Sigma D_j < 0$, (или фиктивный сток, если $\Sigma S_i - \Sigma D_j > 0$), мощность которого равна величине невязки, положив тарифы на перевозку в этот фиктивный узел равными нулю.

Стратегия и методы решения ТЗ

Задача (1),(2) есть задача линейного программирования с ограничениями – равенствами. Число переменных в задаче равно nm. Система ограничений состоит из m+n уравнений, ранг системы равен m+n-1, то есть, любое допустимое базисное решение ТЗ будет содержать m+n-1 базисных переменных.

1. Находится начальный план перевозок.

2. Непосредственно в транспортной таблице производится улучшение начального плана, то есть, последовательный переход от одного плана к другому, связанный с уменьшением суммарной стоимости перевозок.

Методы нахождения начального плана перевозок.

Метод северо-западного угла.

Пользуясь таблицей (1), распределяем груз, начиная с загрузки левой верхней (северо-западной) клетки (1,1), двигаясь из нее по строке вправо или по столбцу вниз. В клетку (1,1) заносим x_{11}=min (S_1,D_1). При $S_1<D_1$ запас первого поставщика будет исчерпан и в дальнейшем первая строка не рассматривается и $x_{1k}=0$, k=2,...,n. На следующих шагах последовательно распределяются запасы второго, …, n-го поставщиков, пока не будет полностью удовлетворен спрос первого потребителя.

При $S_1>D_1$спрос первого потребителя будет полностью удовлетворен и в дальнейшем первый столбец не рассматривается и $x_{k1}=0$, k=2,...,n.. На следующих шагах последовательно удовлетворяется спрос второго, …, m-го потребителя.

Если $S_1=D_1$, то в одну из клеток выбывающих первой строки и первого столбца (лучше в клетку с наименьшим тарифом) заносится так называемый базисный нуль, и $x_{k1}=x_{1k}=0$, k=2,...,n. В оставшейся таблице распределение ресурсов начинается с северо-западного угла, то есть, с клетки (2,2).

Все нулевые клетки таблицы, кроме (1,1) и клетки с базисным нулем, оставляются пустыми или отмечаются точкой.

Последней будет заполнена клетка (m,n).

Метод северо-западного угла не учитывает величину тарифов, поэтому найденный начальный план перевозок скорей всего будет далек от оптимального.

Метод минимальной стоимости.

Метод аналогичен предыдущему, но на каждом шаге заполнение клеток начинается с клетки, которой соответствует наименьшее значение тарифа c_{ij}; при наличии нескольких клеток с одинаковым тарифом заполняется любая из них. В клетку записывается максимально возможное значение поставки. Затем из рассмотрения исключается строка. соответствующая поставщику, запасы которого исчерпаны, либо столбец. соответствующий потребителю, спрос которого удовлетворен полностью. Если в процессе заполнения таблицы одновременно исключаются строка и столбец (это происходит при полном исчерпывании запаса и полном удовлетворении спроса), то в одну из свободных клеток записывается базисный нуль. Клетка с базисным нулем не должна образовывать цикл с ранее занятыми клетками.

Метод потенциалов

Метод обеспечивает переход от одного плана перевозок к другому (от одной матрицы перевозок к другой), соответствующему уменьшению целевой функции.

Введем следующие понятия:

1. Цикл – замкнутая ломаная с вершинами в клетках и звеньями, расположенными вдоль строк и столбцов матрицы перевозок. В каждой вершине встречаются два звена, причем одно из них располагается по строке, а другое – по столбцу. Число вершин цикла четно. Циклом может быть самопересекающаяся ломаная, то точки самопересечения не могут быть вершинами цикла.
2. Означенный цикл – цикл, одной из вершин которого приписан знак »+» и при обходе цикла в каком-либо направлении знаки вершин чередуются.
3. Сдвиг по циклу на величину $Q \geq 0$. При этом значения x_{k1}, стоящие в положительных вершинах цикла. увеличиваются на Q, а стоящие в отрицательных вершинах цикла уменьшаются на Q.

Задача, двойственная к ТЗ (1),(2), запишется в виде:

$$F(u_1,...,u_m,v_1,...,v_n)= \Sigma\ S_i\ u_i+\Sigma\ D_j v_j \rightarrow \max; \qquad (4)$$

$$u_i+ v_j \le c_{ij};\ i=1,...,m,\ j=1,...,\ n \qquad (5)$$

где двойственные переменные u_i и v_j свободные по знаку.

При этом, по теореме о дополняющей нежесткости, для того, чтобы планы пары двойственных задач x_{ij}^0 и u_i^0, v_j^0, удовлетворяющие ограничениям (2), (3) и (4), были оптимальными необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$x_{ij}^0(c_{ij}- u_i^0- v_j^0)=0,\ i=1,...,m,\ \mathbf{j=1,...,\ n} \qquad (6)$$

Числа u_i и v_j, $i=1,...,m$, **$j=1,..., n$,** будем называть потенциалами источников и стоков, соответственно

То есть, для оптимального плана ТЗ необходимо выполнение условий:

1) каждой базисной клетке в транспортной таблице соответствует сумма потенциалов. равная тарифу этой клетки.
2) каждой свободной клетке соответствует сумма потенциалов, не превышающая тарифа этой клетки.

Алгоритм метода потенциалов

1) Найти начальный план перевозок методом северо-западного угла или методом минимальной стоимости.
2) Для каждой из m+n-1 базисных клеток составить уравнение $u_i+ v_j= c_{ij}$. Решить полученную систему (m+n-1) уравнений с (m+n) неизвестными, для определенности приравняв одну из переменных, например. u_1, нулю. Остальные потенциалы при этом определятся однозначно.
3) Для каждой свободной клетки вычислить относительные оценки $\Delta_{ij}= c_{ij}-(u_i+ v_j)$.
4) проанализировать относительные оценки:
   - если все относительные оценки неотрицательны, то задача решена и получен оптимальный план перевозки;

- если среди оценок есть отрицательные, найти наименьшую отрицательную и пометить соответствующую клетку транспортной таблицы знаком «*».

5) Для свободной клетки (i,j) с выбранной оценкой, помеченной «*», построить означенный цикл, взяв эту клетку со знаком “+”. Все остальные вершины цикла должны располагаться в базисных клетках.
6) Выполнить сдвиг по построенному циклу на величину Q, равную наименьшему из тарифов в отрицательных вершинах цикла. Если наименьшее значение достигается в нескольких отрицательных вершинах, то во всех таких вершинах. кроме одной, при сдвиге следует поставить базисный нуль для сохранения числа базисных клеток равным (m+n-1)..Элементы матрицы, не входящие в цикл. остаются без изменений.
7) Перейти на шаг 2.

Замечание 1. В задачах открытого типа (не выполняется условие (3)) предварительно следует ввести фиктивные пункты, а затем решать полученную закрытую ТЗ методом потенциалов.

Замечание 2. В открытых ТЗ может присутствовать дополнительное требование к оптимальному плану: полный вывоз продукции из заданного источника либо полностью удовлетворить потребности заданного стока. В обоих случаях вводятся фиктивные пункты для приведения задачи к закрытому типу и устанавливаются тарифы на перевозку для заданных пунктов, равные М. где М – достаточно большое положительное число.

Замечание 3. Введение дополнительных ограничений может привести к невозможности найти оптимальный план перевозок.

Контрольные задания

Задания 1-6 содержат параметр V, который определяет вариант заданий.
Число V является порядковым номером студента в группе.

В заданиях 7-10 вариант определяется также порядковым номером студента в группе по циклу.

Задание 1. Линии уровня

1.1. Приведите определение и свойства линии уровня функции нескольких переменных.

1.2. Укажите связь между линиями уровня и градиентами.

1.3. Постройте линии уровня U_α для функции

$$y = -V{*}x_1 + 2V{*}x_2$$

при α=0, α=1, α=2.

1.4. Постройте линию уровня U_α при α=3 для функции

$$y = x_1\hat{}2 - V{*}x_1{*}x_2 + 2{*}x_2\hat{}2 + V{*}x_1.$$

Вычислите и нарисуйте градиент этой функции в точке (1; 1).

Задание 2. Числовые характеристики симметричной квадратной матрицы.

2.1. Приведите определения и геометрическую интерпретацию числовых характеристик квадратной матрицы:

- определитель,
- число обусловленности,
- собственные числа,
- собственные векторы,
- сингулярные числа.

2.2. Найдите гессиан H функции f(x, y) = Vx^2 +4xy+5y^2 в точке (1; 0).

Постройте множество точек, в которое оператор с матрицей H отображает единичную окружность S_1 с центром в точке (0; 0). Этот образ является эллипсом. Полуоси являются собственными векторами матрицы H, а длины полуосей – собственными числами λ_i.

2.3. Постройте линию уровня $U_{\alpha=1}$ функции f(x, y) в точке (1, 0). Линия уровня также является эллипсом, полуоси которого – собственные векторы, а длин полуосей являются сингулярными числами матрицы и обратно пропорциональны квадратному корню из соответствующего собственного числа, то есть равны $1/\lambda_i^{0,5}$. В некотором смысле, два эллипса из пунктов 5.2 и 5.3 являются ортогональными и взаимно-обратными.

Задание 3. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

3.1. Приведите формулу Тейлора для функций одной и нескольких переменных

3.2. Проведите квадратичную аппроксимацию в точке (1; 1) для функции

$$F(x, y) = (x + y - V)\, e^{-(x^2 - xy + y^2)}$$

Задание 4. Нахождение локальных экстремумов

4.1. Используя критерии оптимальности, найдите экстремумы для функции

$$F(x, y) = (x + y - V)\, e^{-(x^2 - xy + y^2)}$$

4.2. Проверьте правильность нахождения точек экстремума двумя свойствами:

- с помощью графика этой функции,
- путем случайного перебора точек в малой окрестности точки локального экстремума.

Задание 5. Одномерная оптимизация

Найти точки экстремума функции

$$F(x) = x^6 - Vx^5 + Vx^3 - 10x^2 + x.$$

Задание 6. Многомерная оптимизация по направлению

Найти точку локального минимума функции

$$F(x) = x_1^2 + Vx_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 - Vx_1x_3 - x_2x_3 + x_1 - Vx_2 + x_3$$

Задание 7. Методы безусловной оптимизации

1. Аналитически найти стационарные точки заданной функции, области выпуклости/вогнутости функции. Найти точку глобального минимума. Оценить «овражность» исследуемой функции в окрестности точки минимума.
2. Построить график функции, используя средства EXCEL или MATLAB.
3. Решить задачу минимизации численным методом из нескольких начальных точек. Сделать вывод об эффективности выбранного метода.
4. При выполнении задания на языке СИ написать классы для работы с векторами и матрицами.

Задание выбирать в соответствии с порядковым номером фамилии студента в списке группы.

1. $f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, метод Хука-Дживса.
2. $f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, метод наискорейшего спуска.
3. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, метод Хука-Дживса.
4. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, метод сопряженных направлений.
5. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$, метод Нелдера-Мида.
6. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$, метод Ньютона.
7. $f(\bar{x}) = -x_1^2 \, exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Нелдера-Мида.
8. $f(\bar{x}) = -x_1^2 \, exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод наискорейшего спуска.
9. $f(\bar{x}) = -x_2 x_1 \, exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод сопряженных направлений.
10. $f(\bar{x}) = -x_2 x_1 \, exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Хука-Дживса.
11. $f(\bar{x}) = -x_1^2 x_2 \, exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Ньютона.
12. $f(\bar{x}) = -x_1^2 x_2 \, exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод дробления шага.

13. $f(\bar{x}) = -x_2^2 exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод наискорейшего спуска.

14. $f(\bar{x}) = -x_2^2 exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Нелдера-Мида.

15. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$, метод дробления шага.

16. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$, метод Ньютона.

17. $f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$, метод Нелдера-Мида.

18. $f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$, метод сопряженных направлений.

19. $f(\bar{x}) = (1.5 - x_1(1 - x_2))^2 + (2.25 - x_1(1 - x_2^2))^2 + (2.625 - x_1(1 - x_2^3))^2$, метод наискорейшего спуска.

20. $f(\bar{x}) = (1.5 - x_1(1 - x_2))^2 + (2.25 - x_1(1 - x_2^2))^2 + (2.625 - x_1(1 - x_2^3))^2$, метод Ньютона.

21. $$f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2) + (1 - x_3)^2 + 10.1(x_2 - 1)^2 + \\ + (x_4 - 1)^2 + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1),$$
метод Ньютона.

22. $$f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2) + (1 - x_3)^2 + 10.1(x_2 - 1)^2 + \\ + (x_4 - 1)^2 + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1),$$
метод дробления шага.

23. $f(\bar{x}) = (x_1 + x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$, метод наискорейшего спуска

24. $f(\bar{x}) = (x_1 + x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$, метод Нелдера-Мида.

25. $f(\bar{x}) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$, метод Ньютона.

26. $f(\bar{x}) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$, метод наискорейшего спуска

27. $f(\bar{x}) = -x_2^2 x_1^2 exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод дробления шага.

28. $f(\bar{x}) = -x_2^2 x_1^2 exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Нелдера-Мида.

29. $f(\bar{x}) = (x_1 - x_2) exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод сопряженных направлений.

30. $f(\bar{x}) = (x_1 - x_2) exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Ньютона.

Контрольные вопросы

Объяснить алгоритмы следующих методов

1. Метод конфигураций (Хука-Дживса).
2. Метод деформируемого многогранника (Нелдера Мида).
3. Метод наискорейшего спуска.
4. Метод сопряженных направлений и его модификации.
5. Метод Ньютона и его модификации.
6. Метод дробления шага.

Задание 8. Методы условной оптимизации

1. Решить задачу минимизации функции методом множителей Лагранжа.
2. Решить ЗНП методом седловой точки. Промежуточную задачу решения СЛАУ решить, используя EXCEL.
3. Решить задачу численным методом [8]. Метод условной минимизации выбрать самостоятельно (см. 1.4.-1.6). Сравнить результат с теоретическим решением.

Задания выбирать в соответствии с порядковым номером студента в журнале.

1. $F_1(\bar{x})=(x_1-4)^2+100x_2^2$,
2. $F_2(\bar{x})=100x_1^2+(x_2-3)^2$.
3. $F_3(\bar{x})=(x_1-10)^2+(x_2-10)^2$
4. $F_4(\bar{x})=100(x_1-10)^2+(x_2-10)^2$
5. $F_5(\bar{x})=(x_1-100)^2+(x_2-10)^2$
6. $F_6(\bar{x})=(x_1-10)^2+100(x_2-10)^2$
7. $F_7(\bar{x})=(x_1-5)^2+(x_2+10)^2$
8. $F_8(\bar{x})=5(x_1-5)^2+(100x_2-1)^2$

Ограничения (для всех вариантов):

$$-x_1+3x_2\le 12,\ \ 2x_1+5x_2\le 30,\ \ 3x_1+2x_2\le 22,$$
$$x_1-3x_2\le 0,\ \ 2\square x_1+5x_2\ge 10,\ \ 5x_1+x_2\ge 5,$$

$$\bar{x}\ge 0.$$

Контрольные вопросы

1. Активные и пассивные ограничения. Регулярная задача.
2. Теорема Куна-Такера.
3. Достаточные условия минимума в задачах математического программирования.
4. Седловая точка.
5. Метод седловой точки для задачи квадратичного программирования.

Задание 9. Задача линейного программирования и симплекс-метод

Вариант 1. Для изготовления четырёх видов продукции (А, Б, В и Г) используется три вида сырья (I, II и III). Ресурсы сырья, нормы его расхода на единицу продукции и получаемая прибыль от единицы продукции заданы в следующей таблице:

Сырьё	Нормы расхода				Ресурсы
	А	Б	В	А	Б
I	2	1	I	2	1
II	1	5	II	1	5
III	3	0	III	3	0
Прибыль	7,5	3	Прибыль	7,5	3

Определить оптимальный план выпуска продукции из условия максимизации прибыли.

Вариант 2. Четыре различных предприятия могут выпускать любой из четырёх видов продукции. Производственные мощности предприятий позволяют обеспечить выпуск продукции каждого вида 50, 70, 100 и 30 тыс. шт., а плановое задание составляет соответственно 30, 80, 20 и 100 тыс. шт. Матрица

$$C = \|c_{ik}\| = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

характеризует себестоимость единицы ***k***-го вида продукции при производстве его на ***i***-ом предприятии.

Найти оптимальное распределение планового задания между предприятиями.

Вариант 3. Для контроля за работой космической ракеты используются четыре вида датчиков (А, Б, В и Г), которые помещены на ракете и результаты измерений которых регистрируются тремя типами наземных регистраторов (I, II, и III). Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и т.д.) и передаёт результаты по отдельному каналу связи на любой регистратор. В следующей таблице указаны численности датчиков и регистраторов, а также время, затрачиваемое на включение соответствующего канала связи

			Датчики			
			А	Б	В	Г
		Число	20	40	50	60
Регистраторы	Тип I	70	2	1	5	3
	Тип II	90	3	2	3	4

	Тип II	60	3	4	1	2

Определить оптимальное закрепление датчиков к регистраторам, при котором достигается минимум суммарных затрат на переключение каналов.

Вариант 4. Поверхность ювелирного изделия составляет 400 см^2. Основной узор занимает 100 см^2, а площадь не украшенных полей – тоже 100 см^2. На оставшуюся часть поверхности необходимо нанести инкрустацию топазами, сапфирами, золотой протяжкой и серебряной чеканкой. При этом топазы должны занимать площадь не менее 80 см^2 и не более 100 см^2. Сапфиры должны по эстетическим соображениям занимать площадь не более 25% от площади, занимаемой топазами, но и не менее 10 см^2. Площадь золотой инкрустации не должна быть более 10 см^2, а площадь серебряной чеканки не менее площади, занимаемой сапфирами и не менее удвоенной площади золотой чеканки, но в то же время и не более 50 см^2.

Необходимо определить минимальное время, необходимое для инкрустации изделия, если известны затраты времени на каждую операцию: на установку топазов – 20 мин/см^2, установку сапфиров – 25 мин/см^2, на покрытие золотом – 120 мин/см^2, на покрытие серебром – 100 мин/ см^2.

Вариант 5. Проектируется бак-кессон крыла самолета. Он состоит из уголков (26 шт.), гнутиков (14шт.), нервюр (7 шт.), лонжеронов (2 шт.), дополнительных лонжеронов (6 шт.), обшивки (2 шт.).

По ТУ заданы определенные ограничения на веса компонент. Вес уголков, гнутиков, нервюр и дополнительных лонжеронов с запасом в 10 кг не должен превышать общего веса обшивок. Для стапельных работ необходимо, чтобы вес нервюр, дополнительных лонжеронов и гнутиков был не более 20 кг. Вес каркаса одного отсека (две нервюры и один дополнительный лонжерон) должен составлять 10% от веса одной обшивки.

Вес основных и дополнительных лонжеронов не может быть менее 30 кг. Необходимо найти согласованные веса всех составляющих так, чтобы общий вес пустого бака-кессона крыла самолета был минимален.

Вариант 6. Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 не должно быть ниже, чем 76, а содержание серы в нем не должно превосходить 0,3%. Для изготовления этого бензина используется смесь из 4 компонентов I, II, III и IV, имеющих разное октановое число и содержание серы:

	I	II	III	IV
Октановое число	68	72	80	80
Содержание серы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурсы, тонн	700	600	500	300
Себестоимость, руб.	40	45	60	90

Составить план получения бензина А-76 с минимальной себестоимостью.

Вариант 7. Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона.

В результате смешивания этих четырёх компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин А – 2:3:5:2, бензин В – 3:1:2:1 и бензин С – 2:2:1:3.

Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами: 120 руб., 100 руб. и 150 руб.

Определить план смешения компонентов, при котором будет достигнута максимальная стоимость всей продукции.

Вариант 8. Из четырёх видов основных материалов (медь, цинк, свинец, никель) составляют три вида сплавов латуни: обычный, специальный и для художественных изделий. Цены единицы веса меди, цинка, свинца и никеля составляют 0,8 руб., 0,6 руб., 0,4 руб. и 1,0 руб., а единицы веса сплава, соответственно, 2 руб., 3 руб., 4 руб.

Сплав для художественных изделий должен содержать не менее 6% никеля, не менее 50% меди и не более 30% свинца; специальный – не менее 4% никеля, не менее 70% меди, не менее 10% цинка и не более 20% свинца. В обычный сплав компоненты могут входить без ограничений.

Производственная мощность предприятия позволяет выпускать не более 400 ед. веса обычного сплава, не более 700 ед. веса специального сплава и не более 100 ед. веса декоративного сплава.

Найти производственный план, обеспечивающий максимальную прибыль.

Задание 10. Транспортная задача

Решить транспортные задачи, заданные матрицами перевозок

Вар.1		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
		115	200	60	40	75	50	120
A1	240	2	M	8	11	3	1	5
A2	180	7	4	3	12	5	9	M
A3	90	1	10	5	1	4	6	2
A4	45	4	4	4	4	4	4	4
A5	100	9	6	5	3	2	1	5

Вар.2		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
		250	40	100	170	80	100	65
A1	35	2	5	8	11	3	1	5
A2	60	7	4	3	12	5	9	8

A3	120	1	10	5	1	4	6	2
A4	250	4	4	4	M	4	4	4
A5	180	9	6	5	3	2	1	5

Учесть, что по маршруту 3-7 должно быть перевезено ровно 50 единиц груза

Вар.3		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
		30	115	45	80	75	80	120
A1	30	2	M	8	11	3	1	5
A2	100	7	4	3	12	5	9	2
A3	200	1	10	5	1	4	6	2
A4	55	4	4	4	4	4	4	4
A5	175	9	6	5	3	2	1	5

Учесть, что из пункта А1 весь груз должен быть вывезен

Вар.4		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
		30	115	45	80	75	80	120
A1	240	2	7	8	11	3	1	5
A2	180	7	M	3	12	5	9	2
A3	90	1	10	5	1	4	6	2
A4	45	4	4	4	4	4	4	4
A5	100	9	6	5	3	2	1	5

Учесть, что из пункта А2 весь груз должен быть вывезен

Литература

1. Стандарт предприятия: Общие требования и правила оформления дипломных и курсовых проектов (работ). СТП УГТУ-УПИ 1-96. Екатеринбург, 1996.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.; Высшая школа, 1993. – 335 с.
3. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации - М.; Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. - 432 с
4. Васильев В.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980. - 518 с.
5. Габбасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. – Минск: Изд-во БГУ, 1981. -
6. Дьяконов В. Matlab: учебный курс / В. Дьяконов. СПб.: Питер, 2001. 560 с.
7. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.; Высшая школа, 2005. – 544 с.
8. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа (теория и приложения). Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 200 с.
9. Визильтер Ю.В., Горбацевич В.С. Описание формы объектов на изображениях при помощи гибких структурирующих элементов //

Сборник трудов научно-технической конференции «Техническое зрение в системах управления 2011». М.: ИКИ РАН. 2011. С. 162-167.
10. Горбацевич В.В. Современное линейное программирование (Сборник задач с решениями на MAPLE5). М.: 1999 – 34 с.
11. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. Изд. 2-е доп. и перераб. М., «Высш. школа», 1975. 270 с. с ил.
12. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 360 с., ил.
13. Филатов А.Ю. Развитие алгоритмов внутренних точек и их приложение к системам неравенств: Автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. Иркутск, 2001. 19 с.

Приложение. Рекомендации по использованию EXCEL и MATLAB

П1. Построение графиков

Для построения графика функции $y=f(x_1,x_2)$ могут быть использованы следующие инструменты:

1. В EXCEL – **Мастер диаграмм**, подтип Поверхность.
   - Используя автозаполнение, на листе EXCEL в столбец A и первую строку с выбранным шагом ввести соответственно значения переменных x_1 и x_2, для которых будут вычисляться значения функции.
   - В ячейку B2 ввести выражение для вычисления функции $f(x_1,x_2)$ в точках $A2, B$1 (знак $ - признак абсолютной адресации, при которой будут зафиксированы первый столбец– перебор значений переменной x_1 и первая строка – перебор значений переменной x_2) и нажать одновременно три клавиши Ctrl, Shift, Enter, поскольку формула используется для обработки массивов. В строке формул должны появиться фигурные скобки.
   - Выделить ячейку B2 и, протянув маркер заполнения сначала вниз, пробегая все ячейки, заполненные в столбце A. а затем вправо, пробегая все ячейки, заполненные в строке 1, заполнить

массив значений функции в узловых точках области построения графика.

- На вкладке Стандартные Мастера диаграмм выбрать Поверхность. Поверхностная диаграмма дает 3-мерное изображение функции, а Контурная диаграмма представляет вид сверху на поверхностную диаграмму и является аналогом линий уровня исследуемой функции.

2. В MATLAB – функции *plot3*, *mesh*, *surf*, *surfl*.
   - С помощью функции *meshgrid* получить двумерные массивы координат узловых точек области построения графика: $u=a:\Delta_1:b$; $v=c: \Delta_2:d$; $[x,y]=meshgrid(u,v)$;
   - Задать исследуемую функцию: $f= f(x,y)$;
   - Применяя указанные выше функции, получить трехмерное изображение: *plot3*(*x,y,f*) или *mesh*(*x,y,f*), *surf*(*x,y,f*), *surfl*(*x,y,f*).

П2. Действия с матрицами

Для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы Гессе могут быть использованы следующие инструменты MATLAB

- $\lambda = eig(a)$ - функция $eig(a)$ возвращает собственные значения заданной матрицы a. Пример задания матрицы 4x4: a = [16 3 2 13; 5 10 11 8; 9 6 7 12; 4 15 14 1] .
- $[v,d] = eig(a)$ – при таком обращении функция возвращает собственные векторы v и собственные значения как элементы диагональной матрицы d.

Для нахождения матрицы, обратной матрице Гессе могут быть использованы следующие инструменты:

1. В EXCEL – функция МОБР возвращает обратную матрицу для матрицы, хранящейся в массиве.

2. В MATLAB – функция $y=inv(a)$ возвращает обратную матрицу для матрицы a.